ゲーム理論ワークショップ２０１１ at 名古屋大学

リスク選択ゲームのリプリケータダイナミクス

岡田 勇 (創価大学)・山本 仁志 (立正大学)

異なるリスクを持つ複数の代替案に直面した時、どの程度のリスクを選ぶべきだろうか。本稿ではこのようなリスク選択行動における適応過程を議論する。

はじめにリスク選択ゲームを定義する。まずα-くじ を定義する。α-くじ とは 0.5 の確率でαを得るか、同じ確率で－αを得る（つまり支払う）かというくじである。定義から明らかなように、このくじは期待値が０で、αの大きさがリスクの大きさを表している。当然ながらαは非負とし、また 0-くじ とは確率 1 で０を得るくじを意味するものとする。この定義によってリスクの度合いが無限に異なるくじを扱うことができ、リスク選択に関する一般的な議論を可能にする。次に、順次性を定義する。ここで「順次」とは、プレイヤーはそれまで行ったくじの結果を知ってから、次のくじにおけるリスクの程度を選択することができるという意味である。順次性の導入によってα-くじは興味深い知見を持つことになる。最後に、利得が結果に及ぼす影響について定義する。リスク選択は意思決定主体が個人で行うゲームのため、あらかじめ与えられた回数のくじを引いた後で得られる得点が結果の源泉となる。得点に比例して結果を得ることができると、全てのくじの期待値が一定のため、リスク選択の多様性が結果に反映しない。そこで、本稿では、プレイをした２人がそれぞれ得点を比較し、得点の大きい方のプレイヤーが結果の全ての果実を受け取る総取り型について考察する。

これらの概念を厳密に表現するためにいくつかの記法を導入する。まず、ゲームの得点に関する記法として期待値ベクトル $v = (x_1, p_1; \cdots; x_n, p_n)$ を定義する。v はそれぞれ確率 p_i で x_i を得ることを意味する。当然 $\sum_i p_i = 1$ である。さらに、収入は昇順に並べる、すなわち $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ であるものとする。この記法を用いるとα-くじを１回だけ行うゲームの期待値ベクトルは $(-\alpha, 0.5; \alpha, 0.5)$ となる。次に、単純化のためくじの種類を制限する。本研究の主要な関心はリスクの程度に関する選択行動が適応的にどのようになるかを分析することであるが、そのもっとも単純なケースはリスクの有無の比較である。そのため、本稿では 0-くじ と 1-くじのみを対象とし、それぞれのプレイヤーが独立に n 回のくじを順次的に選択するゲームを扱うこととしたい。ここでは、これを n 次ゲームと呼ぶことにする。ここで第 i くじで選択するαを a_i と表記する。次に、順次性を導入するため第 n 回目のくじの結果としてαを得る場合を $h_n = W$、αを支払う場合を $h_n = L$ と表現し、第 $n+1$ 回目のくじの選択をそれまでのくじの結果の履歴 $H_n = (h_1 h_2 ... h_n)$ を用いて決定できることを表現できるようにしよう。すなわち $i > 1$ のときの a_i は $a_i = a_i(H_{i-1})$ となる。

最後に、戦略の表現を行う。a_i は 0 か 1 であるから、くじの表現をビットで対応できる。第 $n+1$ くじは履歴 H_n で決定するので 2^n 通りの戦略がある。これを順にビットで表現しよう。例えば $H_2 = (WW)$ であるとき $a_3 = a$, $H_2 = (WL)$ なら $a_3 = b$, $H_2 = (LW)$ なら $a_3 = c$, そして $H_2 = (LL)$ なら $a_3 = d$ とすると、第 3 くじの戦略を $abcd$ と表現するものとする。これを第 1 くじの戦略から順にならべたものをゲームの戦略表現とする。この表記に従うと n 次ゲームは $2^n - 1$ ビットで表現できる。ただし 0-くじを選択するとその回のゲームの勝敗がなくなるので（確率１で０なので)、この場合は勝利した方のみを記述し、負けた

方の戦略は $-$ と記述することにする。この表記によって n 次ゲームの戦略表現が厳密に定義できた。また戦略表現のうち $-$ を 0 で置き換えると戦略表現はビット列となるので、これを 2 進数とみなして 10 進表記したものを戦略番号とよび、戦略番号が i の戦略を s_i と呼ぶ。n 次ゲームの全ての戦略の戦略番号 x は $0 \leq x < 2^{2^n-1}$ となる。

簡単な証明により以下の定理が導出できる。

定理 n 次ゲームの全戦略の総数 k_n は以下の漸化式を満たす。

$$k_1 = 2, \quad k_{n+1} = k_n + {k_n}^2$$

数列 k_n は $n > 1$ において数列 $b_1 = 2, \quad b_{n+1} = {b_n}^2$ よりも大きいので、$k_n \geq 2^{2^{n-1}}$ となる。これは指数関数よりも速いスピードで増加することを意味する。

次に、リスク選択ゲームの動学を分析するために、戦略 s_i の集団における存在比を x_i とすると、$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ は n 次元の単位単体となる、すなわち全ての i について $0 \leq x_i \leq 1, \quad \sum x_i = 1$ を満たすものとする。また全ての i について $x_i > 0$ が成り立っているとき x は内部にあるといい、そうではない時、x は境界にあるという。

戦略 s_i, s_j 間の優劣を表現するため、相互作用行列 A の各成分 a_{ij} を次のように定義する。

$$a_{ij} = \sum_{x_l^i > x_m^j} p_l^i p_m^j + \sum_{x_l^i = x_m^j} p_l^i p_m^j / 2 - 1/2$$

この定義から $a_{ij} + a_{ji} = 0$ が全ての i, j において成り立つので、A は反対称行列となる。リプリケータの動学方程式 (RE) は $\dot{x_i} = x_i((Ax)_i - x \cdot Ax)$ と記述できるが A が反対称行列の場合は $x \cdot Ax = 0$ となるので、$\dot{x_i} = x_i(Ax)_i$ となる。これを差分方程式に変換すると、各成分において以下の式が成り立つことになる。

$$\delta x_i = \sum_j a_{ij} x_j x_i$$

はじめに RE の特徴を整理する。特に断らない限り A は縮退行列でない（多重根の固有値が存在しない）ものとする。x が平衡点であるとは全ての i について $\dot{x_i} = 0$ となることを意味するが、内部にある平衡点は $(Ax)_1 = (Ax)_2 = \cdots = (Ax)_n$ を満たす必要があるので、高々 1 個存在する。また、x が飽和平衡点であるとは平衡点 x が $x_i = 0$ ならば $\dot{x_i} \leq 0$ かつ $x_i > 0$ ならば $\dot{x_i} = 0$ を満たすことをいう。飽和平衡点において $\{i | x_i > 0\}$ をパーシステンスという。RE は少なくとも一つの飽和平衡点を持つことが Hofbauer and Sigmund (1998, The Theory of Evolution and Dynamical Systems, Cambridge University Press) によって証明されている。

さらに、A が反対称行列の場合 RE の第 2 項が消えるので、線形微分方程式となる。この場合は $x(t) = e^{At}x(0)$ と表せるため A の固有値で系の特徴が決まる。反対称行列の固有値は全て純虚数で、原点を中心に虚数軸上を対象に存在するので、平衡点は渦心点となり中立安定（リアプノフ安定だが吸引しない）に過ぎない。また任意の小さな摂動により系は双曲型構造安定となるので、平衡点は渦心点ではなくなり、系が大きく異なることになる (Hofbauer and Sigmund, 1998)。さらに、Chawanya and Tokita (2002, J. of Physical Society of Japan, 71(2), 429-431) によると、反対称行列では飽和平衡点が一意に定まることが証明されている。また内部平衡点が存在するためには固有値 0 を持つ必要があるが、固有値の対称性より、n は奇数でなければならないことが分かる。このことからパーシステンスとなる戦略の総数は奇数となる。

以上から、n 次ゲームは摂動がない場合は飽和平衡点が一つのみ存在しそれは渦心点となることが分かる。さらに任意の摂動に対し構造安定するが、摂動を限りなく小さくした時の連続性の議論から、飽和平衡点の一意性は維持されることが分かる。そのいずれの場合もパーシステンスとなる戦略の総数は重複を除外すると奇数となっている。ここで以下の定理が導出できる。

定理 摂動がない 3 次ゲームの渦心点は $s_{81}, s_{83}, s_{89}, s_{91}, s_{113}, s_{115}, s_{117}, s_{119}$ で構成される。

総取り型のリスク選択ゲームに順次性を導入すると、期待値ベクトルが非対称となるパターンを作ることができるため、適応的な意味において戦略に優劣が存在する。2 次ゲームの分析から明らかなように、はじめにリスクを取ったくじで勝利した場合は次のくじはリスクを取らず、そうでない場合は次のくじでもリスクを取ったくじを選択するという戦略が優位であることは、この種のゲームにおける基本的な原則を明らかにしている。つまり、相対的に優位に戦略とは、比較的リスキーだが最もリスクが高いというわけではない。しかも、比較的高いリスクで勝利した場合は、その後はリスクを取らない保守性な戦略が優位であるという原則である。このような態度は人間社会に広くみられる。例えば、若い時にリスクを取って大きな利得を得たものの多くは、年老いてからリスクを避けて安定した生活を好むかもしれない。最初にリスクを取って勝利した後リスクを避けるのは、すでに獲得した利得を手放すことを忌避する損失回避効果 (Kahnemann and Tversky, Econometrica, 47, 313-327, 1979) と関連が深い。しかし行動経済学やプロスペクト理論はこれらの効果の存在を指摘するにとどまり、なぜ人間がこれらの心理特性を獲得するにいたったのかについてのメカニズムについては何も語っていない。本研究がその一つの理論仮説を提示している。

3 次ゲームのリプリケータを解くと、はじめに s_{83} が市場を席巻することが分かる。これは、期待値ベクトルから分かるように、s_{83} の期待値が 0 を超える確率が 0.625 と高く、多くの戦略に勝利することができるからである。その結果、多くの戦略が絶滅する。しかし物語はここで終わらない。戦略 s_{83} が市場を淘汰すると、s_{83} に優位である、よりリスキーな戦略 s_{119} が一気にチャンピオンに上り詰める。s_{119} は、それ自体は多くの戦略（5 種類ある）に劣位であったり同等であったりするが、s_{83} が多くの戦略を絶滅させたため、淘汰を免れた一部の戦略の中では頭角を現すことができたのである。本稿では、s_{83} のような戦略を秩序形成型戦略と、s_{119} のような戦略を最終適応型戦略と呼ぶ。すなわち、秩序形成型戦略は、リスクの程度がやや高いが勝利した場合は保守的になる特徴を有しているが、無数の戦略の多くを淘汰させ、系の秩序を形成する働きを持つ。一方、最終適応型戦略は、かなり高いリスクを有している戦略であり、無数の戦略が群雄割拠している間は頭角を現すことができないが、秩序形成の後は、限られた戦略群の中で市場を席巻する力を持っている。リスク選択行動において見られる 2 種類の適応的な戦略は多くの領域に適用できる可能性がある。