順次性のあるリスク選択ゲームの適応的戦略

岡田勇　山本仁志
(創価大学　立正大学)

1. はじめに

リスク選択は今日の重要な研究テーマである。人々は常にリスクテイキングの機会の直面している。しかし、リスク選択行動研究の多くは実証的である。Payne (2005), Kahneman and Tversky (1979), Shampanier and Ariely (2007), Zeelenberg et.al (1996) らは人間の非合理的な行動パターンを実験や観察によって明らかにし、行動経済学やプロスペクト理論を提唱した。しかし、彼らの理論はそれを経験的事実の記述として表現しており、なぜそのような事実が生じるのかについては説明していない。Rabin (2000) や Diecidue and Ven (2008) らはミクロ経済学の定式化を用いてリスクという経験的事実そのものを記述することに成功しているが、やはりメカニズムについては説明していない。メカニズムを探ろうとする研究は Roos and Nau (2009) などわずかであり、彼らは極めて限定的な問題を取り扱ったため、我々が議論したい汎用的なリスク選択行動に適用するには、彼らの研究をいくつかの点で拡張する必要がある。

我々の定義するリスク選択ゲームには主要な性質が２つある。一つは順次性である。順次性とは、時間軸上に選択すべきゲームが点在しており、それぞれのゲームの選択結果が次のゲームの開始前に分かっているという性質である。以前行った選択の結果を考慮して次の選択を行うという順次性は、時々刻々と変化する金融価格に対応したポートフォリオの選択、直前に外交交渉の結果に基づいた戦略の立案、中盤における囲碁の手など、多様な社会的場面に見られる。

もう一つの主要な性質は総取り型と呼ばれる性質である。本稿では、プレイヤーのリスク選択行動の結果得られる利得の大小によって、勝敗が決定され、勝者が全ての果実を受け取るような総取り型を扱うことにする。サッカーゲームは、僅差であってもダブルスコアの差が付いていても、結果は勝者と敗者を分けるゲームである。人間や商品、あらゆるものをランキングするシステムも対象物を並べていく。入学試験は不合格者から合格者を区分する。商品は購入されるか売れ残って在庫に回るかどちらかである。また、他にも、将棋では序盤の戦略においてどの程度のリスクを選ぶかによって、ゲームの流れは変わり、勝敗に大きな影響をもたらすが勝敗は総取り型の典型例であろう。このような種類の競争では、プレイヤーの利得も大小によってゲームの勝者が決まる。

驚くべきことに総取り型のリスク選択行動に順次性を導入すると、自明ではないリスク選択行動が適応的であることが示されることになる。もし、自身の取る行動に関する合理性に関する人々の計算が不完全ならば、適応的な議論は重要であろう。総取り型といった結果のルールは我々の社会に根深く存在し、人類の歴史の多くの記録を残してきた。例えば、人類はライバルとの競争の結果、自身のパートナーを総取りしてきた。それゆえ、パートナーを獲得する戦略を人類が学習する際に適応的であることは自然な仮定である。

2. 問題の定式化

ここで基本モデルを開発する。まずα-くじ を定義する。α-くじ とは 0.5 の確率でαを得るか、同じ確率で－αを得る（つまり支払う）かというくじである。このくじは期待値が０で、αの大きさがリスクの大きさを表している。当然ながらαは非負とし、また 0-くじ とは確率 1 で０を得るくじを意味するものとする。次に、順次性を定義する。ここで「順次」とは、プレイヤーはそれまで行ったくじの結果を知ってから、次のくじにおけるリスクの程度を選択することができるという意味である。最後に、リスク選択は意思決定主体が個人で行うゲームのため、あらかじめ与えられた回数のくじを引いた後で得られる得点が結果の源泉となる。得点に比例して結果を得ることができると、全てのくじの期待値が一定のため、リスク選択の多様性が結果に反映しない。そこで、本稿では、プレイをした２人がそれぞれ得点を比較し、得点の大きい方のプレイヤーが結果の全ての果実を受け取る総取り型について考察する。

これらの概念を厳密に表現するためにいくつかの記法を導入する。まず、ゲームの得点に関する記法として期待値ベクトル $v=(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ を定義する。v はそれぞれ確率 p_i で x_i を得ることを意味する。当然 $\Sigma p_i = 1$ である。さらに、収入は昇順に並べる、すなわち $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ であるものとする。この記法を用いるとα-くじを１回だけ行うゲームの期待値ベクトルは $(-\alpha, 0.5; \alpha, 0.5)$ となる。本稿では 0-くじ と 1-くじのみを対象とし、それぞれのプレイヤーが独立に n 回のくじを順次的に選択するゲームを扱う。ここでは、これを n 次ゲームと呼ぶことにする。ここで第 i くじで選択するαを a_i と表記する。次に、順次性を導入するため第 n 回目のくじの結果としてαを得る場合を h_n=W、αを支払う場合を h_n=L と表現し、第 n+1 回目のくじの選択をそれまでのくじの結果の履歴 $H_n =(h_1 \ldots h_n)$ を用いて決定できることを表現できるようにしよう。すなわち i>1 のときの a_i は $a_i(H_i)$ となる。

最後に、戦略の表現を行う。a_i は 0 か 1 であるから、くじの表現をビットで対応できる。第 n+1 くじは履歴 H_n で決定するので 2^n 通りの戦略がある。これを順にビットで表現しよう。例えば H_2=(WW) であるとき a_3=a, H_2=(WL) なら a_3=b, H_2=(LW) なら a_3=c, そして H_2=(LL) なら a_3=d とすると、第 3 くじの戦略を abcd と表現するものとする。これを第 1 くじの戦略から順にならべたものをゲームの戦略表現とする。この表記に従うと n 次ゲームは 2^n-1 ビットで表現できる。ただし 0-くじを選択するとその回のゲームの勝敗がなくなるので（確率１で０なので）、この場合は勝利した方のみを記述し、負けた方の戦略は - と記述することにする。この表記によって n 次ゲームの戦略表現が厳密に定義できた。また戦略表現のうち - を 0 で置き換えると戦略表現はビット列となるので、これを２進数とみなして 10 進表記したものを戦略番号とよび、戦略番号が i の戦略を s_i と呼ぶ。n 次ゲームの全ての戦略の戦略番号 x は $0 \leqq x \leqq 2\{^{2\wedge n-1}\}-1$ となる。

3. 動学分析

リスク選択ゲームの動学を分析するために、戦略 s_i の集団における存在比を x_i とすると、$x=(x_1, \ldots, x_n)$ は n 次元の単位単体となる。また相互作用行列 A の各成分 a_{ij} を次のように定義すると $a_{ij} + a_{ji} = 0$ が全ての i,j において成り立つので、A は反対称行列となる。

$$a_{ij} = \Sigma\_\{x^i_l > x^j_m\}\ p^i_l\, p^j_m + \Sigma\_\{x^i_l = x^j_m\}\ p\_{}_l\, p^j_m / 2 - 1 / 2$$

リプリケータの動学方程式は $dx_i / dt = x_i((Ax)_i - x \cdot Ax)$ と記述できるが A が反対称行列の場合は第２

項が消える。これを差分方程式に変換すると、各成分において以下の式が成り立つことになる。

$$\Delta x_i = \Sigma_j a_{ij} x_j x_i$$

ここで有益となる概念をいくつか定義する。

・戦略 s_i が Perfect Neutral であるとは、任意の j に対し $a_{ij}=0$ となるこという。

・戦略 s_i が Perfect Dominant であるとは、任意の i でない j に対し $a_{ij}>0$ となることをいう。

・戦略 s_i が Quasi Perfect Dominant であるとは、任意の Perfect Neutral でも i でもない j に対し $a_{ij}>0$ となることをいう。

・戦略の集合 D が Colony Dominant であるとは、単位単体の内部にある任意の戦略の分布 x に対し $\Sigma_{i\in D}\ \Sigma_j a_{ij} x_j x_i>0$ が成り立つことを言う。

Colony Dominant が存在すると、それ以外の戦略はいかなる集団の初期状態からも常にその総数が減少することから、適応過程において消滅すると見なせるので、議論の対象から外すことができる、という意味で強力な道具となる。

定理 A を反対称行列とする。このときある戦略の集合 D が Colony Dominant であることの必要十分条件は、任意の D に含まれない j に対し $\Sigma_{i\in D} a_{ij} \geqq 0$$ かつ $\Sigma_{i\in D} a_{ik}>0$ を満たす D に含まれない k が存在することである。

1 次ゲームの戦略空間では、すべての戦略が Perfect Neutral なので、どのような集団の初期状態からも時間不変である。一方、2 次ゲームの場合は戦略 s_2 と s_4 が Perfect Neutral であるので Perfect Dominant は存在しない。しかし戦略 s_5 は Quasi Perfect Dominant となるので、任意の集団の初期状態から戦略 s_5 が準支配的となることが分かる。これに引き換え 3 次ゲームになると Perfect Neutral も Perfect Dominant も Quasi Perfect Dominant も存在しないので分析が複雑になる。しかし、上記の定理を使うと相互作用行列のみを使って簡単な計算で Colony Dominant の有無が求まることになる。

定理 3 次ゲームの場合には Colony Dominant が存在し $D=\{s_{81},s_{83},s_{89},s_{91},s_{113},s_{115},s_{117},s_{119}\}$である。

4. 議論とまとめ

総取り型のリスク選択ゲームに順次性を導入すると、期待値ベクトルが非対称となるパターンを作ることができるため、適応的な意味において戦略に優劣が存在する。2 次ゲームの分析から明らかなように、はじめにリスクを取ったくじで勝利した場合は次のくじはリスクを取らず、そうでない場合は次のくじでもリスクを取ったくじを選択するという戦略が優位であることは、この種のゲームにおける基本的な原則を明らかにしている。つまり、相対的に優位に戦略とは、比較的リスキーだが最もリスクが高いというわけではない。しかも、比較的高いリスクで勝利した場合は、その後はリスクを取らない保守性な戦略が優位であるという原則である。このような態度は人間社会に広くみられる。例えば、若い時にリスクを取って大きな利得を得たものの多くは、年老いてからリスクを避けて安定した生活を好むかもしれない。最初にリスクを取って勝利した後リスクを避けるのは、すでに獲得した利得を手放すことを忌避する損失回避効果（Kahnemann and Tversky, 1979）や保有効果（Kahnemann and Tversk, 2000）と関連が深い。しかし行動経済学やプロスペクト理論はこれらの効果の存在を指摘するにとどまり、なぜ人間がこれらの心理特性を獲得するにいたったのかについてのメカニズムについては何も語っていない。本研究がその一つの理論仮説を提示している。

3 次ゲームにおいて Colony Dominant を構成している戦略は比較的リスクが高い戦略であるが、最も高いリスクを持つ戦略 s_{127} は初期の世代において消滅してしまっている。特に重要となる戦略 s_{83} と s_{119} に焦点を当てて議論する。

リプリケータを解くと、はじめに s_{83} が市場を席巻することが分かる。これは、期待値ベクトルから分かるように、s_{83} の期待値が０を超える確率が 0.625 と高く、多くの戦略に勝利することができるからである。その結果、多くの戦略が絶滅する。しかし物語はここで終わらない。戦略 s_{83} が市場を淘汰すると、s_{83} に優位である、よりリスキーな戦略 s_{119} が一気にチャンピオンに上り詰める。s_{119} は、それ自体は多くの戦略（５種類ある）に劣位であったり同等であったりするが、s_{83} が多くの戦略を絶滅させたため、淘汰を免れた一部の戦略の中では頭角を現すことができたのである。

本稿では、s_{83} のような戦略を秩序形成型戦略と、s_{119} のような戦略を最終適応型戦略と呼ぶ。すなわち、秩序形成型戦略は、リスクの程度がやや高いが勝利した場合は保守的になる特徴を有しているが、無数の戦略の多くを淘汰させ、系の秩序を形成する働きを持つ。一方、最終適応型戦略は、かなり高いリスクを有している戦略であり、無数の戦略が群雄割拠している間は頭角を現すことができないが、秩序形成の後は、限られた戦略群の中で市場を席巻する力を持っている。このように適応的なリスク選択戦略の２タイプは現実的な事象を説明しているだろうか。例えば、携帯電話のキャリア市場は群雄割拠であった時は広範な相手に強い会社が市場を少数のプレイヤーに抑え込んだが、その後はよりリスキーな戦略を有する会社が優位性を持つことになった。ビール業界も、一般受けするビールが市場を支配した後は、リスキーに新商品を展開したビールが頭角を現している。このようにある程度新規参入にコストがかかる市場では、当初のリーダーがよりリスキーな戦略にその地位を奪われるというのはしばしばみられる。また進化生態学に目を転じると、そもそも二酸化炭素を吸収して生存していた生物は、環境が安定してからは酸素というリスキーな物質を取り込むことができた種にヘゲモニーが移った。このようにリスク選択行動において見られる２種類の適応的な戦略は多くの適用領域を持っている。

文献

[Diecidue, E., 2008] with J.V.D. Ven, Aspiration level, probability of success and failure, and expected utility. International Economic Review, 49(2), 683-700.

[Kahneman, D., 1979] with A. Tversky, Prospect theory: An analysis of decisions under risk. Econometrica, 47, 313-327.

[Kahneman, D., 2000] with A. Tversky, Choices, Values, and Frames, Cambridge U.P.

[Payne, J.W., 2005] It is whether you win or lose: The importance of the overall probabilities of winning or losing in risky choice. Journal of Risk and Uncertainty, 30, 5-19.

[Rabin, M., 2000] Risk aversion and Expected-Utility theory: A calibration theorem. Econometrica, 68(5), 1281-1292

[Roos, P., 2009] with D. Nau, Conditionally Risky Behavior vs Expected Value Maximization in Evolutionary Games. In Sixth Conference of the European Social Simulation Association (ESSA 2009).

[Shampanier, K., 2007] with N. Mazar, D. Ariely, Zero as a Special Price: The True Value of Free Products. Marketing Science, 26(6), 742-757.

[Zeelenberg, M., 1996] with J. Beattie, J. van del Pligt, N.K. de Vries, Consequences of regret aversion: Effects of expected feedback on risky decision making. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 65, 148-158.

Sen, A. K., 1977, *On Economic Inequality*, Expanded edition with a substantial annexe by James E. Foster and Amartya Sen, Oxford: Clarendon Press.（＝2000, 鈴村興太郎・須賀晃一訳『不平等の経済学』東洋経済新報社.）